第64卷 第5期 天 文 学 报 Vol. 64 No. 5
2023年9月 ACTA ASTRONOMICA SINICA Sept., 2023

doi: 10.15940/j.cnki.0001-5245.2023.05.002

任意倾角的共轨运动研究*

鲁 瑞[1] 雷汉伦[1,2] 周礼勇[1,2†]

(1 南京大学天文与空间科学学院 南京 210023)
(2 现代天文与天体物理教育部重点实验室 南京 210023)

摘要 共轨运动天体与摄动天体的半长径相同, 处于1:1平运动共振中. 太阳系内多个行星的特洛伊天体即为处于蝌蚪形轨道的共轨运动天体, 其中一些高轨道倾角特洛伊天体的轨道运动与来源仍未被完全理解. 利用一个新发展的适用于处理1:1平运动共振的摄动函数展开方式, 对三维空间中的共轨运动进行考察, 计算不同初始轨道根数情况下共轨轨道的共振中心、共振宽度, 分析轨道类型与初始轨道根数的关系. 并将分析方法所得结果与数值方法的结果相互比较验证, 得到了广阔初始轨道根数空间内共轨运动的全局图景.

关键词 天体力学: 圆型限制性三体问题, 方法: 分析与数值, 共轨

中图分类号: P134; **文献标识码**: A

1 引言

圆型限制性三体问题存在五个平动点, 均位于两个主天体m、m'的轨道面xy平面内. 其中两个平动点L_4、L_5分别与m、m'构成等边三角形的构型, 称为三角平动点. 当系统的质量参数$\mu = m'/(m+m')$在Routh临界质量(~ 0.03852)以下时, L_4、L_5点附近天体的运动是线性稳定的[1], 而其非线性稳定性(仅除去$\mu = 0.02429$、0.01351两个不稳定的质量参数值)则在KAM定理(Kolmogorov-Arnold-Moser theorem)出现之后得到了证明[2–4]. 1906年, 天文学家在木星轨道处观测到第一颗在L_4点附近运动的小天体, 上述理论因此获得天文观测的证实. 后来, 此类在太阳-行星的三角平动点附近运动的天体被称为特洛伊小天体(本文以下简称为特洛伊). 随着更多观测的开展以及观测技术的进步, 越来越多的行星特洛伊被发现. 截至目前, 已经有10000颗左右的木星特洛伊、32颗海王星特洛伊、9颗火星特洛伊、1颗天王星特洛伊以及2颗地球特洛伊[1]被观测到.

在平动点附近运动的天体, 其轨道半长径与第二主天体相同, 因而其运动被称为“共轨运动”. 常见的共轨运动轨道包括围绕某个三角平动点(L_4或L_5)附近的蝌蚪形轨道、围绕两个三角平动点和一个共线平动点(L_3)的马蹄形轨道以及在第二主天体附近的准卫星轨道等, 其中以蝌蚪形轨道最为常见. 我们在图1中显示了这几类轨道类型. 图中选用了旋转坐标系, 其旋转速度与主天体相互绕转的圆轨道角速度相同. 图1中的几个例子, 小天体与两个主天体轨道共面, 而且轨道的初始偏心率都较小. 在小天体偏心率较大或轨道倾角较高时, 还有可能出现一些包含以上两种轨道类型的混合轨道.

2022-06-23收到原稿, 2022-07-04收到修改稿

*国家自然科学基金项目(11933001、12150009)及科技部重点研发项目(2019YFA0706601)资助

†zhouly@nju.edu.cn

[1]https://minorplanetcenter.net/iau/lists/Trojans.html

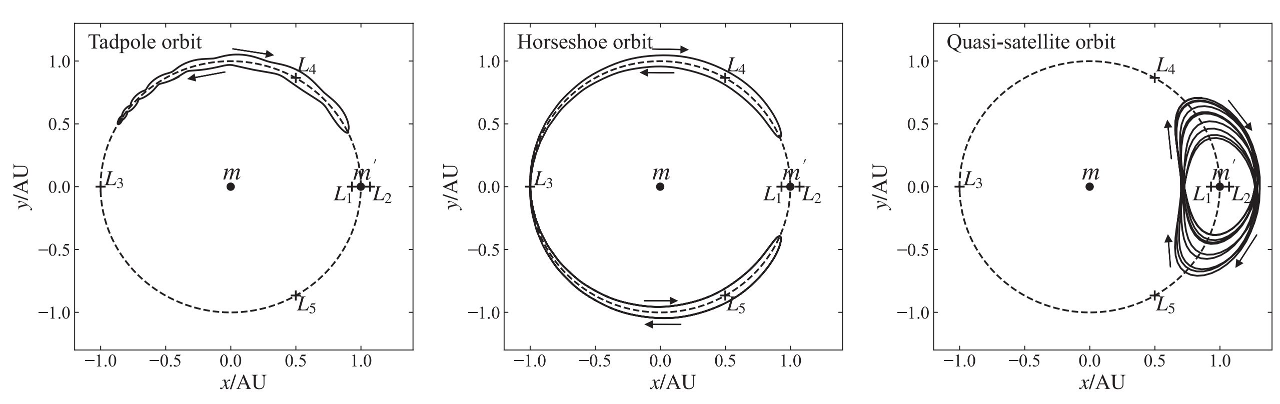


图 1 平面圆型限制性三体问题下的平动点(L_1–L_5)及三种共轨运动轨道类型(蝌蚪形、马蹄形、准卫星)

Fig. 1 The equilibrium points (L_1–L_5) and three types of co-orbital orbits (tadpole, horseshoe and quasi-satellite) in the planar circular restricted three-body problem

最早人们将处于太阳-行星的蝌蚪形轨道上的天体称为特洛伊, 其实在一定扰动时蝌蚪形轨道和马蹄形轨道会相互转变, 现在马蹄形轨道上的小天体往往也称为特洛伊. 特洛伊具有十分复杂、有趣的运动特征, 它们的来源和去向也可能成为研究太阳系早期历史的重要线索[5].

从方法来看对特洛伊和共轨运动的研究以数值模拟居多. 一些工作针对个别特洛伊, 对观测获得的轨道进行数值模拟以分析它们的轨道稳定性、推测其来源, 例如针对新发现的地球特洛伊[6]和海王星特洛伊[7–8]的细致分析. 另一些工作则对具体某个行星的三角平动点附近的稳定区域作全局性的探讨, 例如最引人关注的木星特洛伊[9–10]、海王星特洛伊[11–12]和地球特洛伊[13–14]的情况. 随着大批太阳系外行星系统的发现, 也有一些工作不局限于具体的太阳系行星, 而是考察质量参数更一般的系统中三角平动点的长期稳定性[15]. 一些工作更进一步, 不局限于限制性三体问题模型, 而是研究太阳系外行星系统中以特洛伊轨道构型存在的行星的运动特征[16], 甚至是处于特洛伊轨道的类地行星[17–18] (它们因质量较小难以直接探测)的运动及其可观测信号.

除了数值方法之外, 也有不少工作利用简化的限制性三体模型, 通过分析或半分析模型来研究特洛伊的动力学演化[19–20]. 在太阳-行星-特洛伊组成的系统中, 特洛伊与行星的平运动频率相同, 发生1:1平运动共振(mean motion resonance, MMR, 也称轨道共振), 特洛伊受到来自行星的强烈摄动, 这种1:1 MMR对特洛伊的动力学演化以及长期稳定性有重要影响. 传统的Laplace摄动函数展开中包含Laplace系数, 该系数在两个天体与中央天体距离相同时是发散的, 因而不能处理1:1 MMR; 另一方面, 摄动函数展开往往基于偏心率e和轨道倾角i这两个小量, 难以处理e和i较大的情况[1, 21].

对高轨道倾角问题, 可以针对特定的倾角构造相应的摄动函数[19]. 例如, 对于极轨道上的半人马座小天体和海王星外天体(Trans-Neptunian Objects), 它们的倾角接近90°, 可以将e和$\cos i$作为小量展开. 对于逆行运动, 倾角接近180°, 则将e和$\cos(i/2)$作为小量进行展开. 进而, 对于任意倾角, 可以设定一参考倾角$i_{\rm r}$, 使得$\sin(i - i_{\rm r})$为小量, 并以此进行摄动函数展开[22]. 利用这种方法构造的摄动函数, Namouni等人计算了2:1、3:1、1:2等共振的共振宽度以及共振中心的位置[23]. 但他们的摄动函数中仍然使用了Laplace系数, 因而并不能处理1:1共振的情况. 为了处理共轨运动问题, 人们选择不使用Laplace系数的摄动函数展开方式, 例如Namouni[24]、Namouni等[25]、Nesvorný等[26]通过半分析的方法对系统的哈密顿直接进行数值平均, 研究e和i较大时共轨运动的长期演化.

上述工作往往聚焦于解决特定轨道参数范围内的问题, 而较少对三维连续参数空间中的共轨运动进行系统的描述. 本文利用新近出现的一种摄动函数展开方法[27]来处理空间圆型限制性三体模型

中1:1 MMR问题. 该方法不使用Laplace系数, 可以有效地描述共轨运动; 同时该展开方法适用于任意轨道倾角, 仅对偏心率有一定限制(小于0.6627, 以保证展开式收敛性). 本文将在偏心率范围$e \in (0, 0.5)$, 倾角范围$i \in (0°, 90°)$的参数空间内分析共轨运动, 特别是三角平动点附近的运动情况. 本文结构如下: 第2节简单介绍该摄动函数展开方法以及本文所用的数值模型, 第3节利用上述摄动函数展开以及数值积分计算共振中心随e、i、近点角距ω等轨道根数的变化以及蝌蚪形轨道的发生范围; 最后在第4节总结本文结论.

2 方法与模型

我们在圆型限制性三体问题模型之下讨论三角平动点附近的运动, 该模型中两个主天体(本文中分别为太阳和木星)在万有引力作用下沿圆轨道相互绕转, 而零质量的第三体(即特洛伊天体)在主天体的引力场中运动. 在处理1:1 MMR问题的时候, 我们希望能够把影响小天体运动的摄动函数R表示为$(a, e, i, \omega, \Omega, \sigma)$的函数, 其中$a$为小天体的轨道半长径、$\Omega$为升交点经度、$\sigma$为1:1 MMR的共振角, σ一般定义为小天体与行星的平经度之差:

$$\sigma = \lambda - \lambda' = (\omega + \Omega + M) - (\omega' + \Omega' + M') \,, \tag{1}$$

其中M为小天体的平近点角, 带撇号的则为行星的轨道根数.

在限制性三体模型中, 小天体围绕第一主天体的运动受到第二主天体的引力摄动而稍偏离二体轨道, 因为引力可写成摄动势的梯度形式, 所以可引入摄动函数R:

$$R = Gm' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2} \cos\psi \right) \,, \tag{2}$$

其中G是万有引力常数, r、r'分别是小天体和第二主天体m'到第一主天体m的距离, ψ是小天体和m'相对于m形成的夹角, 而Δ是小天体和m'之间的距离, 表达式为:

$$\Delta = \left(r^2 + r'^2 - 2rr'^2 \cos\psi \right)^{1/2} \,. \tag{3}$$

首先将该摄动函数以e为小量进行展开(为保证收敛性, 要求$e < 0.6627$), 然后定义

$$\Theta = \frac{2aa'}{(a+a')^2} = \frac{2\alpha}{(1+\alpha)^2} \,, \tag{4}$$

其中a、a'分别是小天体和m'的轨道半长径, $\alpha = a/a'$为两者之比值. 显然, $\Theta \in [0, 1]$, 且$a = a'$时, $\Theta = 1/2$. 再定义$\Theta_c = 2\alpha_0/(1+\alpha_0)^2$(其中$\alpha_0$为初始半长径之比), 此时$\delta = \Theta - \Theta_c$是一个小量, 可将摄动函数以$\delta$为小量进行展开. 具体展开过程参见文献[27], 本文仅列出展开式对快变量λ'作平均之后的摄动函数形式(为简便起见仍记作R):

$$\begin{aligned} R = {} & \frac{Gm'}{a'} \sum_{n\geqslant 0}^{N} \sum_{k\geqslant 0}^{k_{\max}} \sum_{q\geqslant 0}^{k} \sum_{l\geqslant 0}^{q} \sum_{m\geqslant 0}^{n} \sum_{t\geqslant 0}^{l} \sum_{t_1\geqslant 0}^{t} \sum_{t_2\geqslant 0}^{l-t} \kappa_0 \times \\ & X_{2t-l-2t_1+2t_2}^{m,(l-2t_1-2t_2)}(e) \frac{\alpha^n}{n!} \times \\ & [D_n f_q(\alpha)] \frac{\sin^{2l}(i/2)}{\tan^{2t}(i/2)} \times \\ & \cos\left[(2t - l - 2t_1 + 2t_2)\sigma + 2(l - t - 2t_2)\omega\right] - \\ & \frac{Gm'}{a'} \left(\frac{a}{a'}\right) \left[X_1^{1,1}(e) \cos^2(i/2) \cos(\sigma) + \right. \\ & \left. X_{-1}^{1,1}(e) \sin^2(i/2) \cos(\sigma - 2\omega)\right] \,, \end{aligned} \tag{5}$$

其中n、k、q、l、m、t、t_1、t_2均为求和下标, N和$k_{\max}$分别为e和δ的展开截断阶数, 本文分别取为4和30, $X_\zeta^{\xi,\eta}(e)$为汉森系数, D为导数算子, 下标n代表对α的n阶导数, 且

$$f_q(\alpha) = \frac{\alpha^q}{(1+\alpha)^{2q+1}} \,, \tag{6}$$

而κ_0的表达式如下:

$$\begin{aligned} \kappa_0 = {} & \frac{(-1)^{n-m+k-q} 2^{q-l} (2k-1)!!}{(2k)!!} \binom{k}{q} \binom{q}{l} \times \\ & \binom{n}{m} \binom{t}{t_1} \binom{l-t}{t_2} \binom{l}{t} \frac{\Theta_c^{k-q}}{(1-\Theta_c)^{1/2+k}} \,, \end{aligned} \tag{7}$$

其中$\binom{\cdot}{\cdot}$为二项式系数.

可采用如下一组正则变量来表达上述摄动函

数:

$$\begin{aligned} &P_1=\sqrt{a}\,,\ \ Q_1=\sigma\,,\\ &P_2=\sqrt{a}(\sqrt{1-e^2}-1)\,,\ \ Q_2=\omega\,,\\ &P_3=\sqrt{a}(\sqrt{1-e^2}\cos i-1)\,,\ \ Q_3=\Omega\,,\\ &P_4=\Lambda'+P_1\,,\ \ Q_4=\lambda'\,, \end{aligned} \tag{8}$$

其中Λ'为与行星平经度λ'共轭的角动量. 进而1:1 MMR系统平均化之后的哈密顿函数(为方便起见, 以常用轨道根数表达)为:

$$H^*=-\frac{1}{2a}-\sqrt{a}-R(a,e,i,\sigma,\omega)\,. \tag{9}$$

在该平均化后的系统中, 不显含Q_3和Q_4, 两者为循环坐标, 与之共轭的角动量P_3和P_4为运动积分, 其中常数P_3给出了系统长期演化过程中a、e、i的耦合关系. 本文旨在研究共振时标内三角平动点附近的运动情况, 而ω的变化远慢于共振角的变化, 因此大多数时候可将ω近似为常数, 哈密顿系统即降为一自由度的可积系统.

除了利用上述摄动函数展开和哈密顿形式进行半分析的计算, 我们在本文中还利用数值方法对运动方程进行直接积分. 本文使用了Swifter数值积分软件[2]中的Helio算法[28]积分测试粒子的轨道. 积分时长经多次试验选为50倍行星的轨道周期, 积分步长为1/20行星的轨道周期, 积分过程中控制精度为测试粒子的位置, 速度相对误差小于10^{-12}, 中心天体为太阳, 行星在圆轨道上, 行星的半长径为单位长度, 太阳和行星总质量为单位质量, 其中行星质量为$10^{-3}M_\odot$, 相当于木星, $M_\odot$为太阳质量.

3 共振结构

平面圆型限制性三体模型中, 两个三角平动点L_4、L_5即为1:1 MMR的两个共振中心, 对应的共振角分别为$\sigma=60°$和$\sigma=300°$. L_4和L_5关于$\sigma=180°$完全对称, 因此本文中仅讨论L_4附近的运动, L_5附近的情况可以通过类似方法得出.

3.1 共振中心

平动点对应着摄动函数的极小值, 因而它们的位置可以由摄动函数展开的表达式求出. 实际上当小天体的轨道不是共面的圆轨道时, 共振中心的位置将偏离60°[24–25], 所以若要讨论三角平动点附近的1:1 MMR, 首先需确定共振中心的精确位置.

如前所述, 共振中心的位置可由摄动函数的极小值位置给出. 我们在图2中给出了小天体初始偏心率$e_0=0.1$、轨道倾角$i_0=30°$、近点角距$\omega_0=60°$时计算共振中心的一个例子. 图中摄动函数R的计算值(实线)随初始共振角σ_0变化, 其极小值的位置以虚线标出, 两条线分别对应L_4和L_5. 同时可以看到R的变化曲线关于$\sigma=180°$对称, 在$\sigma=180°$处达到局部极大值, 该处对应着平动点L_3. 当给定小天体的(e_0,i_0,ω_0)时, 我们可以通过如图所示的方法, 求得摄动函数极小值的位置, 该位置即对应着共振中心.

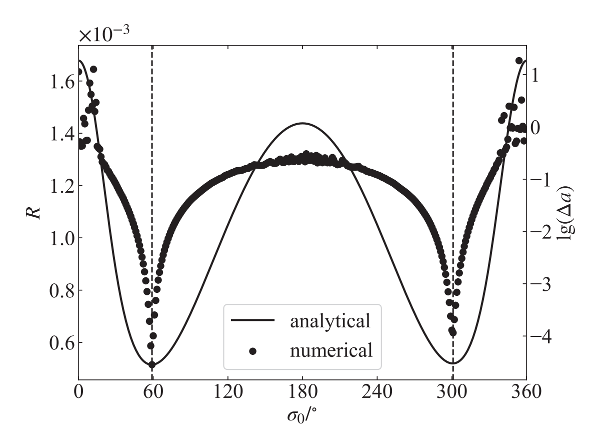


图 2 摄动函数R(实线, 左纵轴)以及半长径振幅Δa(散点, 右纵轴)随共振角σ_0的变化

Fig. 2 The perturbation function R (solid line, left ordinate) and semi-major axis amplitude Δa (scattered dots, right ordinate) versus the resonant angle σ_0

另一方面, 位于共振的小天体其共振角σ和半长径a发生秤动, 而在共振中心处它们的秤动幅度最小, 因而我们也可以用数值方法模拟小天体的运动, 并通过检查它们的秤动幅度的方法找到共振中心. 图2中的散点在对数坐标上显示了我们用数值方法积分运动方程所得到的半长径的秤动振幅(Δa). 同样地, Δa在$\sigma_0=60°$和$\sigma_0=300°$附近达到极小, 与计算摄动函数极小值的分析方法得到的

[2]https://www.boulder.swri.edu/swifter/

结果一致.

通过上述两种方法可以得到共振中心(以该处共振角σ的值标识, 以下记作σ_c)的位置随着小天体轨道根数e_0、i_0、ω_0等的变化情况, 我们总结了几组典型根数情况, 显示于图3. 图中不同的线型代表不同的参数下数值积分的结果和利用摄动函数的分析结果. 图3 (a)是给定轨道偏心率情况下共振中心随倾角i_0的变化情况. 我们看到σ_c先减小后略增大, 在$i_0 = 70°$–$80°$附近达到极值($\sigma_c \sim 56°$). 小天体的轨道偏心率较小($e_0 = 0.1$)时, 数值结果与分析结果吻合得很好; 偏心率略大($e_0 = 0.3$)时, 两种方法的结果略有差别. 分析方法是经过对摄动函数的平均化之后的情况, 而数值方法没有平均化的过程, 显示了瞬时根数的情况. 受到展开阶数以及摄动函数收敛性的影响, 偏心率较大时两种方法所得的结果之间误差会增大, 但仍在合理范围之内.

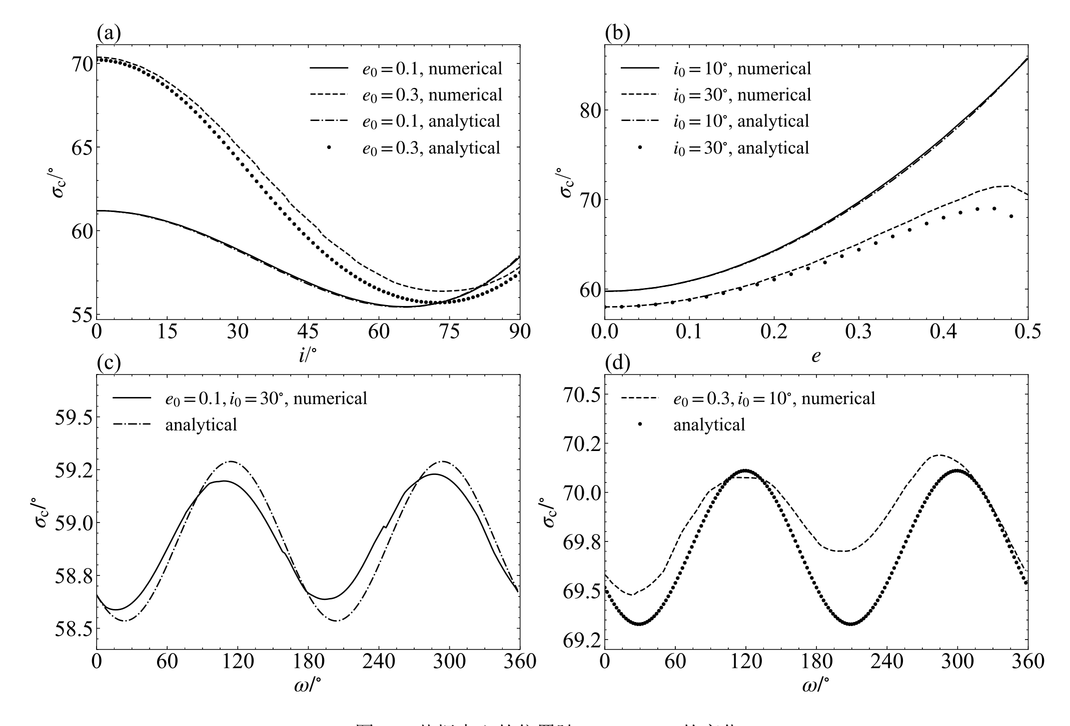


图 3 共振中心的位置随e_0、i_0、ω_0的变化

Fig. 3 The variation of resonance center with respect to e_0, i_0 and ω_0

图3 (b)显示了给定轨道倾角$i_0 = 10°$和$30°$时, 共振中心随偏心率e_0的变化. 此时我们看到σ_c随偏心率的增加而显著地变大, 在较小的偏心率($i_0 = 10°$)情况下, 共振中心可达到$\sigma_c \sim 85°$. 分析方法与数值方法的符合情况与图3 (a)类似—在低倾角和小偏心率情况下基本完全一致, 随着i_0和e_0的变大两者略有差别, 在我们关心的轨道根数范围内, 这种差别可以接受.

类似图3 (a)–(b), 为了检查初始近点角距对小天体运动的影响, 我们在图3 (c)–(d)中显示了两组给定偏心率和轨道倾角的情形下共振中心随近点角距的变化. 在$e_0 = 0.1$、$i_0 = 30°$和$e_0 = 0.3$、$i_0 = 10°$两种情形下, 共振中心σ_c的变化范围均仅有1°左右, 表明近点角距值ω_0对共振中心位置的影响不大, 也同时表明小天体的轨道运动几乎不受近点角距的影响. 所以为简单起见, 在本文以下部分, 若无特殊情况, 我们固定一个ω_0值, 不失一般性, 均取为60°. Namouni等人利用Hill三体问题模型给出了L_4、L_5点位置的解析表达式[29], 发现共振中心的位置主要受小天体偏心率和轨道倾角的影响, 而

近点角距对σ_c影响不大, 与图3的结果一致.

由上述讨论可知, 计算摄动函数的极小值即可获得共振中心的位置. 固定近点角距为60°之后, 我们在偏心率-轨道倾角的平面(e_0, i_0)上计算了共振中心的位置, 并展示于图4. 图4中空白区域为蝌蚪形轨道消失的区域, 而虚线为数值方法给出的蝌蚪形轨道存在的边界.

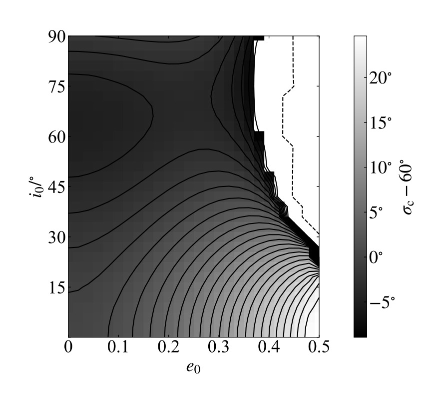


图 4 (e_0, i_0)平面上共振中心的位置分布. 灰度表示$\sigma_c - 60°$的大小.

Fig. 4 The resonance center on (e_0, i_0) plane. The grayscale indicates $\sigma_c - 60°$.

在图4中, 我们可以看到在轨道倾角较小时, 随着偏心率的增加共振中心逐渐远离$\sigma_c = 60°$而向L_3方向移动. 在给定轨道偏心率的情形下, 共振中心的偏离又随着轨道倾角的提高而略有缩小. 从摄动函数的角度分析, 共振中心的这种偏离都是使得在共振中心处摄动函数值尽量地小. 而从几何构型上看, 这样的偏离使得小天体在椭圆轨道上运动时避免过于接近摄动天体(行星).

3.2 共振宽度

当偏心率和轨道倾角为零时, 共振中心的小天体处于受力平衡状态, 其共振角和半长径取为平衡位置的固定值. 当小天体的初始位置偏离平衡点、或初始轨道偏心率和倾角不为零时, 共振角和与之共轭的轨道半长径即以一定的振幅振荡. 人们将平运动共振中能够保持共振运动构型的天体半长径的变化范围称为共振宽度, 共振宽度反映了共振影响的范围, 可以表征共振的强度. 与半长径振幅变化同时发生的还有共振角的振幅, 因此后者有时也作为共振宽度的指标, 也可以通过共振角的行为判断运动与共振中心的偏离. 本文定义小天体运动中半长径a的上下边界(运动的边界)为共振宽度.

3.2.1 共振宽度的计算方法

我们已经展示, 在固定了近点角距ω之后, 哈密顿函数(9)式刻画的是一自由度的系统, 一对共轭变量P_1、Q_1构成该哈密顿系统的相空间. 在共振角σ和半长径a的平面内作出哈密顿函数等能线, 就可以了解该共振的全局几何性质. 以$e_0 = 0.1$、$i_0 = 30°$、$\omega_0 = 60°$的情形为例, 我们作出哈密顿等能线, 如图5所示. 图中实线代表哈密顿等能线, 背景灰度代表哈密顿绝对值的大小, 颜色越深该值越大, 反之则越小. 虚线标出了两种运动类型分界线的位置, 内部为围绕共振中心的秤动, 对应蝌蚪形轨道, 而最外部σ作循环运动. 在两者之间, σ以180°为中心秤动, 振幅小于360°, 是马蹄形轨道运动. 与蝌蚪形轨道相比, 马蹄形轨道在相图上所占的区域非常小, 说明它们发生的几率很小, 也不是本文研究的重点, 因此图中未标出马蹄形轨道的区域.

图5中哈密顿绝对值极小值处为共振中心的位置, 两个共振中心分别在L_4和L_5点附近, 方形点标出的是$\sigma = 60°$附近的共振中心, 点线标出的即为蝌蚪形轨道的共振宽度Δa, 其计算公式如下[20, 27]:

$$\Delta a = a_{\rm sep} - a_0 = \sqrt{\frac{8}{3}}\left[R(\sigma_{\rm u}) - R(\sigma_{\rm s})\right]^{\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

上式中$a_{\rm sep}$为分界线上对应着共振中心位置的半长径值, 它满足$H^*(a_{\rm sep}, \sigma_{\rm s}) = H^*(a_0, \sigma_{\rm u})$, 而$\sigma_{\rm s}$和$\sigma_{\rm u}$分别代表稳定和不稳定的平衡点的共振角, $R(\sigma_{\rm s})$和$R(\sigma_{\rm u})$则为对应的摄动函数值. 显然, 此处稳定平衡点即为前节求出的共振中心$\sigma_{\rm s} = \sigma_c$, 而不稳定平衡点为$L_3$点附近的平衡点, 对应图2中摄动函数在$\sigma_0 = 180°$附近的极大点, 可以通过与计算$\sigma_c$类似的方法求得. 利用(9)式和(10)式即可计算小天体的共振宽度Δa, 我们称这种方法为分析方法. 另外, 小天体的共振宽度也可以由数值方法积分试验体轨道运动方程并寻找共振中允许的最大半长径偏离的方式来计算, 我们称这样的计算为数值方法.

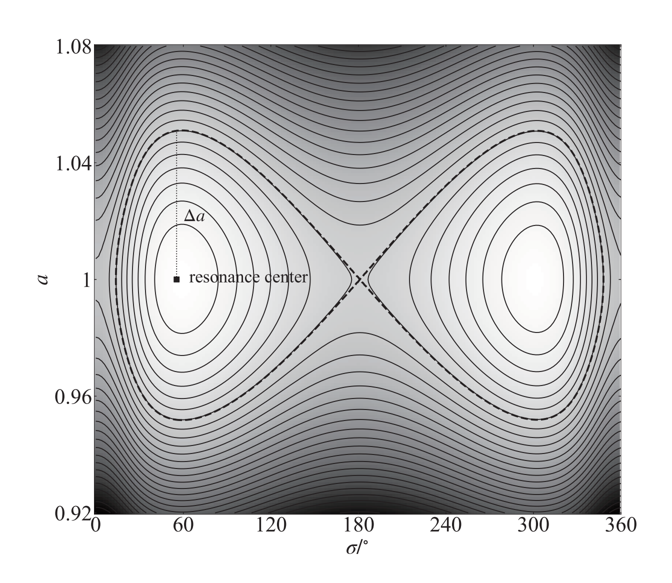


图 5 哈密顿等能线图($e_0 = 0.1$、$i_0 = 30°$、$\omega_0 = 60°$)

Fig. 5 Hamiltonian level curve for $e_0 = 0.1, i_0 = 30°, \omega_0 = 60°$

3.2.2 轨道倾角的影响

图6总结了以分析方法和数值方法计算共振宽度的一些例子, 其中初始偏心率e_0分别为0.1、0.3和0.5, 我们显示了共振宽度随轨道倾角的变化.

图6中横坐标为试验体的初始半长径a_0, 纵坐标为粒子的初始倾角i_0. 试验体共振角取为共振中心的位置$\sigma_0 = \sigma_c$, 由前一节的计算结果给出, 而近点角距固定为60°. 根据(10)式计算得到不同i下的Δa, 在图中点出$1\pm\Delta a$, 由红色点表示. 在用数值方法计算共振宽度时, 半长径在$(0.9, 1.1)$范围内均匀取50个点, 而轨道倾角在$(0°, 90°)$范围内取90个点, 用数值方法模拟这些轨道至50倍轨道周期, 并记录轨道运动过程中半长径的变化范围(图6中以颜色显示, 由深蓝到浅蓝表示半长径的变化范围由小到大). 由图6容易看到, 在共振中心处这些试验体的半长径振幅很小, 离中心处越远振幅越大, 并且在特定的位置振幅发生一个跳变(运动由蝌蚪形轨道变成马蹄形轨道或其他类型轨道, 图中由最右侧的黄色点标出, 这些点通过将马蹄形轨道的平衡位置代入(10)式计算得到). 该位置就是蝌蚪形轨道振幅最大处, 其与共振中心的距离也就是共振的宽度.

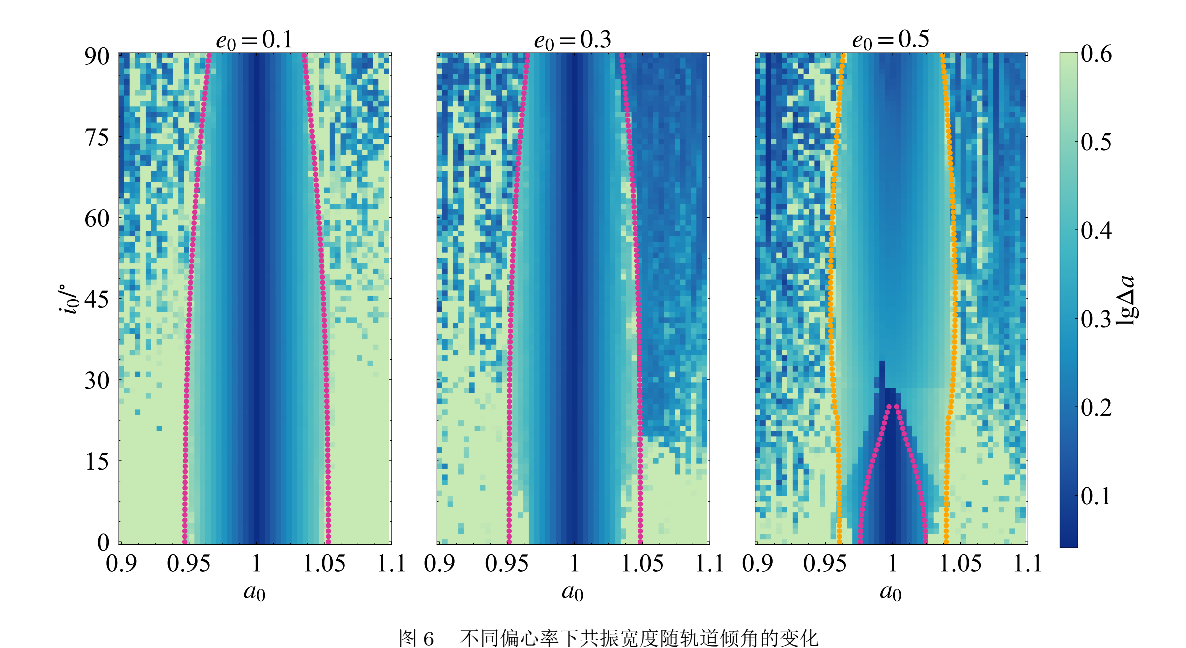


图 6 不同偏心率下共振宽度随轨道倾角的变化

Fig. 6 The relationship between resonance width and inclination for several eccentricities

图6显示数值方法给出的共振边界与由分析方法给出的边界(共振宽度)非常好地相互吻合. 在偏心率较小时(图6中$e_0 = 0.1$、0.3), 分析结果与数值结果吻合较好; 而当$e_0 = 0.5$时, 分析方法与数值方法的吻合情况稍差, 主要是因为偏心率较大时分析方法使用的摄动函数收敛性变差. 同时, 值得注意的是, 相比于小偏心率的情形, 在$e_0 = 0.5$时蝌蚪形轨道出现的区域大幅地减小, 在轨道倾角30°以上的区域, 蝌蚪形轨道基本消失. 整体上看, 倾角对共振宽度的影响不大, 蝌蚪形轨道的共振宽度随倾角增加而略微收窄.

3.2.3 轨道偏心率的影响

与轨道倾角不同, 小天体的初始偏心率显著地影响1:1共振的稳定性与轨道构型[30], 偏心率越大, 共振宽度越小. 与图6类似, 我们选择了典型的三个轨道倾角$i_0 = 0°$、30°和60°, 将共振宽度随偏心率变化的情况总结于图7中. 在不同轨道类型之间, 共振角振幅$\Delta\sigma$会发生跳变, 可以比半长径振幅Δa更好地区分轨道类型, 因此为了更清晰地刻画边界, 我们在数值结果中以$\Delta\sigma$标识和区分不同的轨道类型. 另外值得注意的是, 考虑到高偏心率时摄动函数展开式收敛性的限制, 图7中分析结果只显示到$e_0 = 0.5$, 而数值结果则到$e_0 = 0.99$为止.

如图7所示, 随着偏心率增加, 蝌蚪形轨道的范围逐渐减小直至在特定偏心率处完全消失. 在平面模型中($i_0 = 0°$), 蝌蚪形轨道在$e_0 = 0.88$左右消失, 被围绕L_3的李雅普诺夫轨道(Lyapunov orbit)取代. 蝌蚪形轨道消失之前, 在此类轨道类型的外侧较窄的区域内, 则有马蹄形轨道(图中以星形表示)出现. 另外如前所述, 我们看到分析方法的结果只到$e_0 = 0.50$为止, 且分析结果与数值结果给出的共振宽度基本一致.

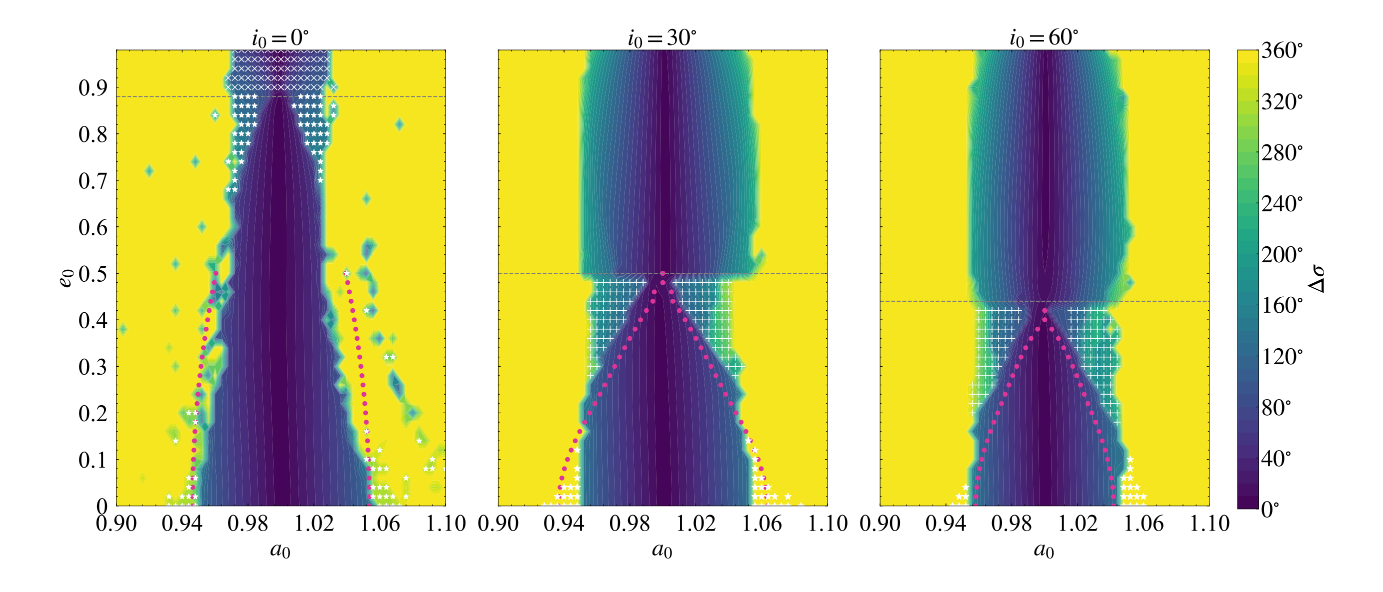


图 7 不同轨道倾角时共振宽度随偏心率的变化. 从左至右分别对应$i_0 = 0°, 30°, 60°$的情况. 图中星形($\star$)、叉号($\times$)和加号($+$)分别代表马蹄形轨道、L_3附近的Lyapunov轨道、蝌蚪形与准卫星形混合轨道[25]. 红色点为分析方法给出的共振宽度, 灰色虚线为蝌蚪形轨道消失时的偏心率. 背景颜色为数值方法计算获得的共振角振幅$\Delta\sigma$.

Fig. 7 The resonance width versus eccentricity for $i_0 = 0°, 30°$ and $60°$. Stars ($\star$), crosses ($\times$) and pluses ($+$) denote horseshoe orbits, the Lyapunov orbit around L_3 and the combination of tadpole and quasi-satellite orbits[25]. The red points mark the resonance width obtained by analytical method, while the grey dotted line marks the eccentricity when tadpole orbits vanish. Color in background indicates the libration amplitude of resonant angle ($\Delta\sigma$).

在倾角较高($i_0 = 30°$、$60°$)时, 蝌蚪形轨道则会在更低偏心率(分别为$e_0 = 0.49$、0.44)处消失. 但与平面模型不同的是, 较高轨道倾角的情况下, 高偏心率处蝌蚪形轨道外侧出现的是由蝌蚪形和准卫星形混合而成的轨道类型(图中加号), 而马蹄形轨道仅出现在$e_0 < 0.10$时蝌蚪形轨道区域外侧的狭窄范围内. 图中虚线上方区域, 大偏心率区域出现的小振幅($\Delta\sigma$)运动是准卫星轨道. 另外, 轨道倾角较高时蝌蚪形轨道仅出现在较低偏心率处, 此时分析方法所揭示的蝌蚪形轨道共振宽度与数值方法得到的结果基本一致.

鉴于分析方法在较低偏心率的情况下获得的蝌蚪形轨道的共振宽度与数值方法给出来的结果基本一致, 我们利用分析方法计算(e_0, i_0)平面上蝌蚪形轨道的共振宽度, 并将结果总结在图8中, 此图即给出了蝌蚪形轨道存在的范围. 图中颜色代表共振宽度(Δa)大小, 而空白处不存在蝌蚪形轨道.

由图8可知, 在较高轨道倾角或较高偏心率的情况下不存在蝌蚪形轨道. 实际上图6中$e_0 = 0.50$、$i_0 > 30°$的区域以及图7中$i_0 = 30°$、$e_0 > 0.49$和$i_0 = 60°$、$e_0 > 0.44$的区域, 小天体仍在1:1 MMR, 其运动也仍然是稳定的(Δa或$\Delta\sigma$的规则分布意味着该处的轨道仍然具有规则而稳定的特征), 只是轨道的类型变成了准卫星轨道. 本文主要关注蝌蚪形轨道的情况, 但为了说明运动类型的变化, 我们在图9展示了初始偏心率$e_0 = 0.50$, 而倾角分别为$i_0 = 20°$和$40°$时的哈密顿相图.

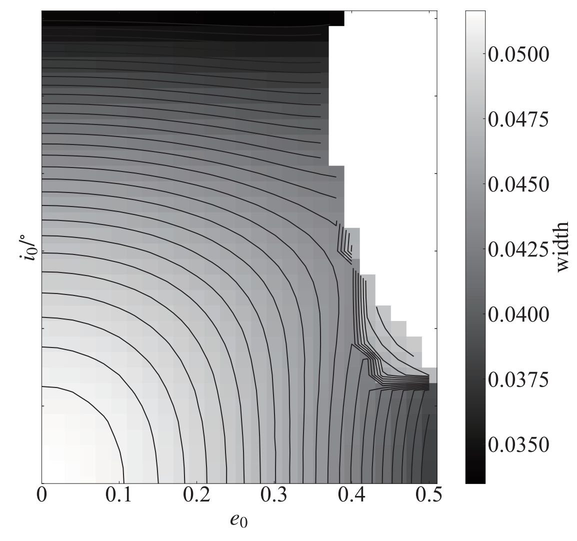


图 8 (e_0, i_0)平面上共振宽度的分布

Fig. 8 The resonance width in (e_0, i_0) plane

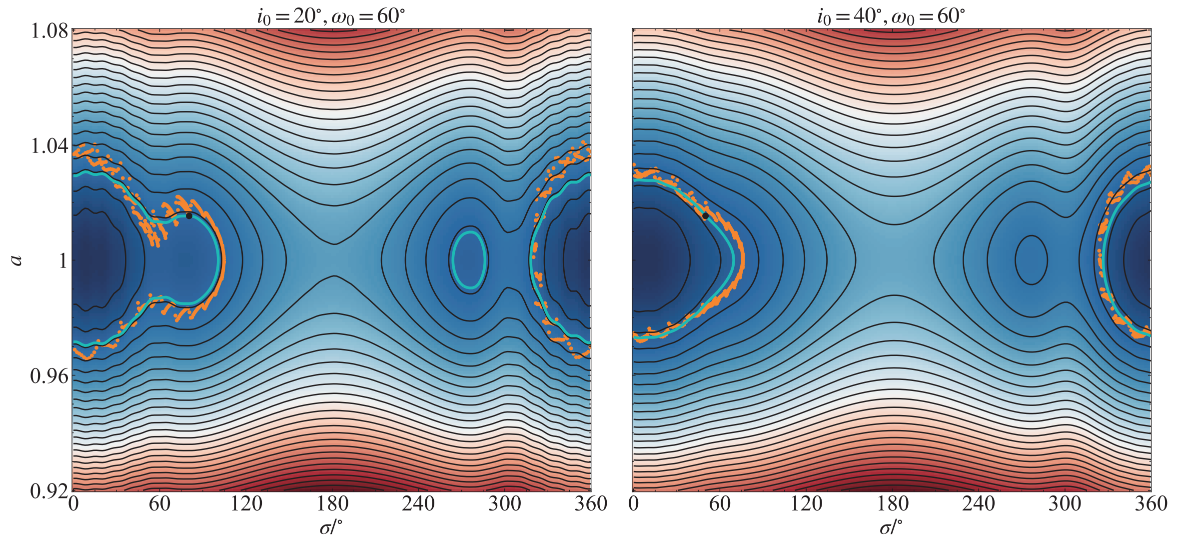


图 9 初始倾角20°(左)和40°(右)的哈密顿等能线图, 初始偏心率为$e_0 = 0.5$

Fig. 9 Hamiltonian level curves for $i_0 = 20°$ (left) and $40°$ (right), with $e_0 = 0.5$ for both

图9中的哈密顿等能线图明显不同于小轨道偏心率的情形(例如$e_0 = 0.1$时的图5)—小偏心率情形下, 只有L_4、L_5对应的椭圆型和L_3对应的双曲型的不动点较为显著, 它们分别是蝌蚪形轨道和马蹄形轨道的共振中心; 而在较大偏心率$e_0 = 0.50$的情形下, $\sigma = 0°$附近新出现的不动点控制了相当大的区域, 该不动点即为第二主天体(行星)附近运行的准卫星轨道的共振中心. 同时, 对于给定的偏心率, 哈密顿相图还随着轨道倾角而变化. 图9中$i_0 = 20°$时, 我们仍然可以看到原L_4、L_5附近的蝌蚪形轨道的共振中心, 而当$i_0 = 40°$时, 原L_4附近的共振中心消失了, 由此处出发的轨道将围绕$\sigma \sim 0°$的共振中心秤动, 成为准卫星轨道. 此外, 与计算蝌蚪形轨道的共振宽度类似, 准卫星的共振宽度也可以通过分析方法计算, 我们在图6中出现准卫星轨道的子图($e_0 = 0.50$)上已经相应标出了分析方法计算得到的准卫星轨道的发生范围(图中橙色点组成的边界).

我们在图9中叠加了积分测试粒子运动方程而得到的真实运动(而非截断且平均化后的哈密顿系统)轨迹在(σ, a)平面上的投影, 即为图中橙色点, 而黑色点为对应测试粒子的初始轨道位置. 可以看到测试粒子的运动轨迹基本符合哈密顿等能线的走向, 说明该哈密顿系统仍可以较为准确地描述相关运动. 值得注意的是, 图9中左侧($i_0 = 20°$)显示的测试粒子的轨迹同时包围了蝌蚪形轨道和准卫星轨道的共振中心, 这正是图7中以"+"标示的"混合轨道".

3.3 近点角距的影响

图9已显示L_4和L_5附近的共振结构不对称, L_4附近的蝌蚪形轨道在更小的轨道倾角条件下先消失不见. 发生这一现象的原因主要是我们计算时给定了$\omega_0 = 60°$这一不对称的值($\omega_0 = 0°$对于L_4、L_5才是对称的). 虽然图3表明偏心率较小时蝌蚪形轨道的共振中心随ω_0的变化较小, 但在偏心率较大时, 共振结构会随着ω_0的取值不同而发生改变[26]. 本文不对此作深入研究, 只在图10中作出$e_0 = 0.1$、0.5两种偏心率条件下ω_0分别取0°、60°和120°的哈密顿相图, 以显示ω_0的取值对轨道构型的影响.

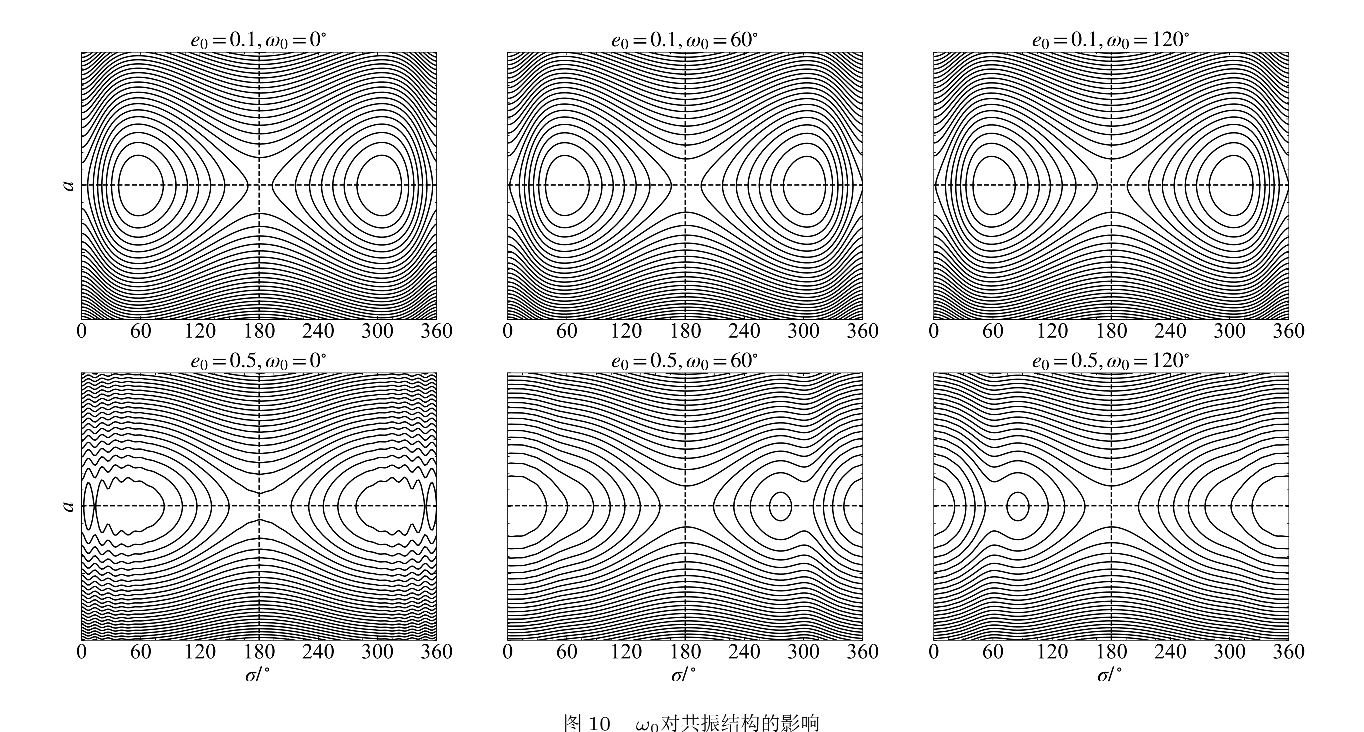


图 10 ω_0对共振结构的影响

Fig. 10 The influence of ω_0 on resonance structure

由图10中左侧子图可知, $\omega_0 = 0°$时, 不管偏心率大小, L_4和L_5附近的运动区域都是相互对称的. 而图10中上一行子图则表明, 偏心率较小($e_0 = 0.1$)时, ω_0的不同取值对相空间结构的影响几乎可以忽略, L_4和L_5附近的运动仅有微小区别; 而在较大偏心率(图10中下一行子图, $e_0 = 0.5$)的情况下, $\omega_0 = 60°$时(下中图) L_4附近的蝌蚪形轨道区域消失, 由此出发的轨道是准卫星轨道; 而在$\omega_0 = 120°$时(下右图) L_4附近蝌蚪形轨道再度出现, 但L_5附近的蝌蚪形轨道消失.

4 总结

共轨运动是与行星发生1:1平运动轨道共振的运动类型, 这种运动的特性决定了行星特洛伊天体的形成和稳定性情况, 并与行星轨道构型的演化、行星际空间尘埃的形成和分布等天文过程和现象密切相关. 共轨天体与行星轨道半长径相同, 受到行星的强烈摄动, 同时传统摄动函数展开方式中Laplace系数在共轨的情况下是发散的, 所以对共轨天体运动的处理, 特别是高倾角、高偏心率情况会有特别的困难. 本文利用一种适用于任意倾角条件和1:1共振的摄动函数展开方式, 结合数值积分, 对共轨运动的性质作了全局性的研究, 完整地提供了轨道倾角在$(0°, 90°)$范围(顺行轨道范围), 偏心率在$(0, 0.5)$范围(摄动函数不发散)下共轨天体的共振中心、共振宽度、轨道类型等的变化情况.

我们得到了共振中心σ_c随小天体的轨道倾角和轨道偏心率的变化情况, 在(e_0, i_0)平面上定量地给出了共振中心的位置. 我们还分析了高轨道倾角和高轨道偏心率情形下, 蝌蚪形轨道被其他轨道类型(准卫星轨道、混合型轨道)替代的过程, 解释了轨道类型转换发生的原因.

我们发现共轨运动中蝌蚪形轨道的共振宽度随轨道倾角和轨道偏心率的变化情况, 定量地给出了共振宽度, 即蝌蚪形共轨运动发生的范围. 我们还讨论了小天体近日点角距ω对共振结构的影响, 发现在偏心率较小的情况下其影响很小可以忽略, 而在偏心率较大的情形下, 不同的小天体近日点角距会引导小天体进入不同的共振轨道构型.

以上结论, 都分别利用摄动函数展开的分析方法和直接积分运动方程的数值方法给出, 两者相互对比验证, 也证实了该摄动函数展开方法处理共轨运动的适用性.

参考文献

[1] Murray C D, Dermott S F. Solar System Dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2000: 83-94
[2] Siegel C L, Moser J K. Lectures on Celestial Mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 1971: 250-256
[3] 周礼勇, 孙义燧, 周济林. 天文学报, 1999, 40: 286
[4] Zhou L Y, Sun Y S, Zhou J L. ChA&A, 2000, 24: 119
[5] Robutel P, Gabern F, Jorba A. CeMDA, 2005, 92: 53
[6] Dvorak R, Lhotka C, Zhou L. A&A, 2012, 541: A127
[7] 武瑞君, 周磊, 周礼勇. 天文学报, 2018, 59: 36
[8] Wu R J, Zhou L, Zhou L Y. ChA&A, 2019, 43: 262
[9] Schwarz R, Gyergyovits M, Dvorak R. CeMDA, 2004, 90: 139
[10] Dvorak R, Schwarz R. CeMDA, 2005, 92: 19
[11] Zhou L Y, Dvorak R, Sun Y S. MNRAS, 2009, 398: 1217
[12] Zhou L Y, Dvorak R, Sun Y S. MNRAS, 2011, 410: 1849
[13] 夏睿奇, 周礼勇. 天文学报, 2018, 59: 8
[14] Zhou L, Xu Y B, Zhou L Y, et al. A&A, 2019, 622: A97
[15] Schwarz R, Bazsó Á, Érdi B, et al. MNRAS, 2014, 443: 2437
[16] Laughlin G, Chambers J E. AJ, 2002, 124: 592
[17] Ji J, Liu L, Kinoshita H, et al. ApJ, 2005, 631: 1191
[18] Ji J, Kinoshita H, Liu L, et al. ApJ, 2007, 657: 1092
[19] Morais M H M, Namouni F. CeMDA, 2013, 117: 405
[20] Gallardo T. CeMDA, 2020, 132: 9
[21] Ellis K. Icarus, 2000, 147: 129
[22] Namouni F, Morais M H M. MNRAS, 2017, 471: 2097
[23] Namouni F, Morais M H M. MNRAS, 2020, 493: 2854
[24] Namouni F. Icarus, 1999, 137: 293
[25] Namouni F, Christou A A, Murray C D. PhRvL, 1999, 83: 2506
[26] Nesvorný D, Thomas F, Ferraz-Mello S, et al. CeMDA, 2002, 82: 323
[27] Lei H L. RAA, 2021, 21: 311
[28] Duncan M J, Levison H F, Lee M H. AJ, 1998, 116: 2067
[29] Namouni F, Murray C D. CeMDA, 2000, 76: 131
[30] Gallardo T. Icarus, 2019, 317: 121

On the Co-orbital Motion of Any Inclination

LU Rui[1] LEI Han-lun[1,2] ZHOU Li-yong[1,2]

(1 School of Astronomy and Space Science, Nanjing University, Nanjing 210023)

(2 Key Laboratory of Modern Astronomy and Astrophysics, Ministry of Education, Nanjing 210023)

Abstract The co-orbital motion occurs when a celestial body (e.g. an asteroid) shares the same semi-major axis with the perturbing object (e.g. a planet), and thus they are in a 1:1 mean motion resonance. Trojan asteroids in the tadpole orbits around planets in the Solar System are these co-orbital objects. The motion and origin of some Trojan asteroids, particularly those on high-inclination orbits, are still not fully understood. In this paper, a newly developed perturbation function expansion, which is applicable to the 1:1 resonance, is used to investigate the co-orbital motion in three-dimensional space. The position of the resonance center and the resonance width are calculated for different initial orbital elements, and the relationship between the orbital types and the initial orbital elements is analyzed. The results obtained by the analytical method are compared with and verified by the results from numerical simulations. A panorama of the co-orbital motion in the wide orbital elements space is obtained.

Key words celestial mechanics: circular restricted three-body problem, methods: analytical and numerical, co-orbit